חישוביות - תרגול 2

דוד קלוטה

14 באפריל 2026

מהלך התרגול

מה הולך להיות לנו היום?

1. הגדרה פורמלית ל־NFA
2. NFA קטן ו־DFA גדול
3. תכונות סגור של NREG
4. פירמול מעברי ε
5. פונצקיית המעברים המוכללת δ^*

התחלנו!

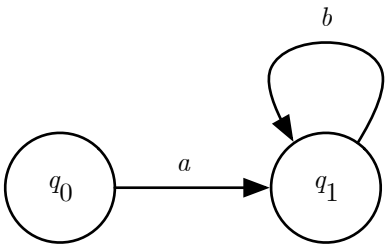
2.1 הגדרה פורמלית ל־NFA

הגדרה 2.1.1 (אוטומט סופי לא דטרמיניסטי Nondeterministic Finite Automaton)**.** NFA הוא חמישייה $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta Q_0, F)$ כך ש־:

1. Q - קבוצת מצבים סופית
2. Σ - א"ב סופי
3. $\delta : (Q \times \Sigma) \to 2^Q$ פונקציית מעברים
4. $Q_0 \subseteq Q$ - קבוצת המצבים ההתחלתיים האפשריים
5. $F \subseteq Q$ - קבוצת המצבים הסופיים

הערה **2.1.1.** נשים לב כי $\varnothing \in 2^Q$ ולכן יכול להיות שלא נראה מעברים מסוימים ב־NFA

דוגמה **2.1.1** (NFA חוקי)**.** להלן דוגמה ל־NFA חוקי לגמרי. נשים לב כי אין פה מספיק מעברים על מנת שזה ייקרא DFA.



איור 1: זה NFA חוקי לחלוטין!

הגדרה 2.1.2 (ריצה ב־NFA)**.** תהי $w = (w_i)_{i\in[n]} \in \Sigma^*$. ריצה של $\mathcal{A}$ על w היא סדרת מצבים $(r_i)_{i=0}^n$ כך ש:

$$r_0 \in Q_0, \quad \forall 0 \leqslant i < n : r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$$

הגדרה 2.1.3 (ריצה מקבלת ב־NFA)**.** ריצה $(r_i)_{i=0}^n$ על מילה $w = (w_i)_{i\in[n]}$ נקראת מקבלת כאשר $r_n \in F$

הגדרה 2.1.4 (קבלה ב־NFA)**.** נאמר ש־NFA $\mathcal{A}$ מקבל מילה w אם **קיימת** ריצה מקבלת של $\mathcal{A}$ על W - כלומר $w \in L(\mathcal{A})$

2.2 NFA קטן ו־DFA גדול

במקרה זה, נדון בשפות אשר ה־NFA הוא בגודל לינארי, אך ה־DFA הוא בגודל אקספוננציאלי.

הגדרה 2.2.1 (השפה L_k). לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר את השפה L_k להיות כל המילים שהאות ה־k מהסוף היא a מעל $\Sigma = \{a, b\}$

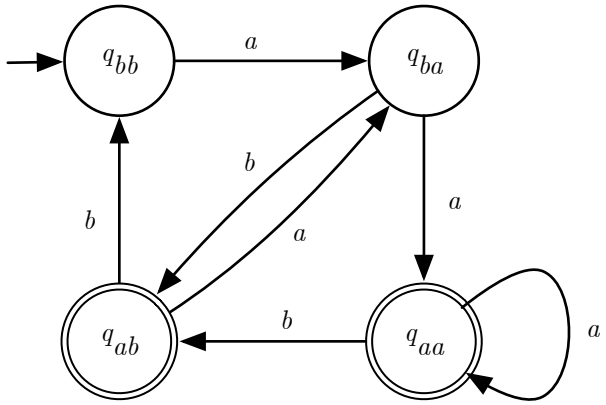
תרגיל 2.2.1. 1. נבנה DFA שמכריע את L_2

2. בנו NFA שמזהה את L_2

3. עבור $k \in \mathbb{N}$ בנו NFA שמזהה את L_k

4. הוכיחו שעבור $k \in \mathbb{N}$ כל DFA יצטרך לפחות 2^k מצבים כדי להכריע את L_k

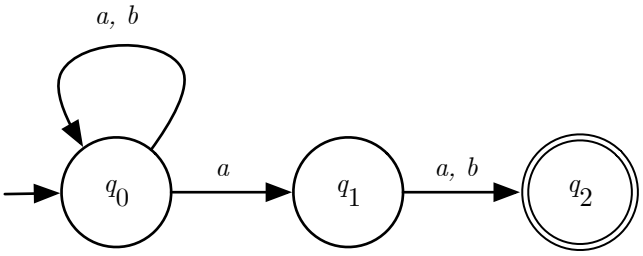
תשובה. 1. להלן אוטומט שמכריע את L_2:



איור 2: DFA שמכריע את L_2

נוכל להוכיח אוטומט זה עם טענת עזר ואינדוקציה כפי שעשינו בתרגול 1, אך לא נעשה זאת פה.

2. להלן NFA שמזהה את L_2 נוכל גם לעשות NFA המזהה את השפה L_2, נשים לב כמה הוא קצר הרבה יותר!



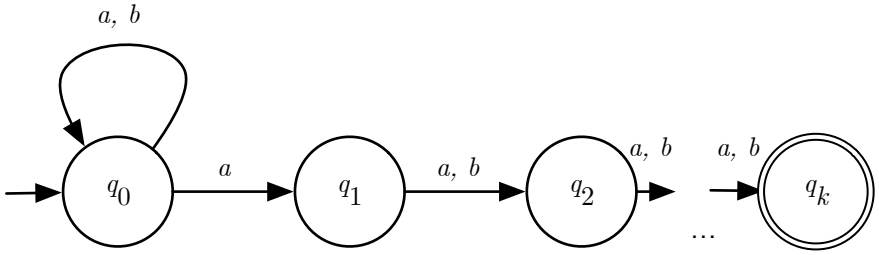
איור 3: NFA שמזהה את L_2

לדוגמה, בעבור הקלט $w = abaabbbab$, נראה כי קיימות שתי ריצות:

(א) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0$ - לא מתקבל

(ב) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_a \to q_{a\sigma}$ - מתקבל!

3. נכליל את מה שעשינו בסעיף 2, ונקבל:



איור 4: NFA $\mathcal{A}$ המזהה את L_k

איך פורמלית מוכיחים ש־NFA מזהה שפה? לכל מילה, נרשום לאילו מצבים היא **יכולה** להגיע.

טענת עזר 2.2.1. *מתקיים כי* $L(\mathcal{A}) = L_k$

סקיצה להוכחה. על מנת להגיע לכך ש־$w \in L_k$ אמ"ם $w \in L(\mathcal{A})$, נידרש להוכיח כי הראשון קורה אמ"ם האות ה־k מבסוף היא a ולכך שזה קורה אמ"ם קיימת ריצה של w המסתיימת ב־q_k - שמתרחש אמ"ם השני.

טענת עזר 2.2.2. *תהי* $w \in \Sigma^*$ *מילה. נסמן את כל האינדקסים שמופיע בהם* a *מהסוף ב־* $(i_j)_{j\in[l]}$. *אז המצבים שבהם תסתיים ריצה של* $\mathcal{A}$ *על* w *הם* $\{q_0\} \cup \{q_{i_j}\}_{j\in[l]}$

סקיצה להוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n = |w|$. בבסיס, ε מגיע רק ל־q_0 ונשים לב שזה הגיוני עם היות ε מילה בלי a. במקרה הכללי, נחלק את $w = u \cdot \sigma$, נזהה מה ה־a מהסוף של u, נשים עוד אות, נוסיף לכל האינדקסים בקבוצת המצבים 1, ומשם נוכיח את הנדרש.

4. נניח בשלילה שקיים DFA $\mathcal{A}$ עם פחות מ־2^k מצבים שמכריע את L_k. נשים לב כי יש 2^k מילים באורך k מעל $\{a,b\}^*$. מעיקרון שובך היונים, קיימות שתי מילים $u, v \in \Sigma^k$ שונות כך שהריצה של $\mathcal{A}$ על שתיהן מסתיימת באותו מצב - כלומר $\delta^*(q_0,u) = \delta^*(q_0,v)$. מכך ש־$u \neq v$, קיים i כך ש־$u_i \neq v_i$. נניח בה"כ כי $u_i = a, v_i = b$. נתבונן ב־

$$\begin{aligned} u' &= v \cdot b^{i-1} \\ v' &= v \cdot b^{i-1} \end{aligned}$$

אזי $u' \in L_k, v' \neq L_k$ ונראה כי:

$$\begin{aligned} F \not\ni \delta^*(q_0, v') &= \delta^*(\delta^*(q_0,v), b^{i-1}) \\ &= \delta^*(\delta^*(q_0,u), b^{i-1}) \\ &= \delta^*(q_0, u') \in F \end{aligned}$$

סתירה!

2.3 תכונות סגור של NREG

טענה 2.3.1. *נניח* $L_1, L_2 \in \mathrm{NREG}$ *מעל א"ב* Σ *- אז* $L_1 \cup L_2 \in \mathrm{NREG}$

הוכחה. קיימים $\mathcal{A}_1 = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ ו־$\mathcal{A}_2 = (P, \Sigma, \eta, P_0, G)$ כך ש־$L(\mathcal{A}_1) = L_1$ ו־$L(\mathcal{A}_2) = L_2$. נבנה אוטומט

$$\mathcal{A} = (P \cup Q, \Sigma, \varphi, Q_0 \cup P_0, F \cup G)$$

כך שפונקציית המעברים $\varphi : (P \cup Q) \times \Sigma \to P \cup Q$ המוגדרת

$$\forall q \in P \cup Q \forall \sigma \in \Sigma : \varphi(q,\sigma) = \begin{cases} \delta(q,\sigma) & q \in Q \\ \eta(q,\sigma) & q \in P \end{cases}$$

נוכיח כי $L_1 \cup L_2 = L(\mathcal{A})$:

כיוון אחד יהי $w \in L_1 \cup L_2$, נוכיח בה"כ כי $w \in L_1 = L(\mathcal{A}_1)$. קיימת ריצה $(r_i)_{i=0}^n$ כך ש־

$$\begin{aligned} & r_0 \in Q_0 \subseteq Q_0 \cup P_0 \\ \forall 0 \leqslant i < n : \quad & r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1}) \\ & r_n \in F \subseteq F \cup G \end{aligned}$$

כאשר נשיפם לב כי $\forall 0 \leqslant i \leqslant n : r_i \in Q$. נשים לב שזו ריצה מקבלת גם של $\mathcal{A}$, ולכן $w \in L(\mathcal{A})$.

כיוון שני תהי $w \in L(\mathcal{A})$. קיימת ריצה מקבלת $(a_i)_{i=0}^n$ של $\mathcal{A}$ על w, כך ש־

$$\begin{aligned} \forall 0 \leqslant i \leqslant n : \quad & a_i \in Q \cup P \\ & a_0 \in Q_0 \cup P_0 \\ \forall 0 \leqslant i < n : \quad & a_{i+1} \in \varphi(a_i, w_{i+1}) \\ & a_n \in F \cup G \end{aligned}$$

נניח בה"כ כי $a_0 \in Q_0$. נוכיח באינדוקציה בי לכל $i \in [n]$, $a_i \in Q$.

מקרה הבסיס $i = 1$ במקרה זה, $a_1 \in \varphi(a_0, w_1)$ אך אנחנו יודעים ש־$a_0 \in q_0$ ולכן

$$a_1 \in \varphi(a_0, w_1) = \delta(a_0, w_1) \in Q$$

המקרה הכללי נניח כי $a_i \in Q$ ונוכיח עבור $i + 1$.

$$a_{i+1} \in \varphi(a_i, w_{i+1}) = \delta(a_i, w_{i+1}) \in Q$$

קיבלנו שלכל $i \in [n]$ מתקיים כי $a_i \in Q$ וגם $a_0 \in Q_0$ וגם $a_{i+1} \in \delta(a_i, w_{i+1})$ וגם $a_n \in F$ ולכן $(a_i)_{i=0}^n$ **ריצה חוקית ומקבלת** של $\mathcal{A}_1$ ולכן

$$w \in L(\mathcal{A}_1) = L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$$

כנדרש. □

טענה 2.3.2. *אם* $L_1, L_2 \in \mathrm{NREG}$*, אז גם* $L_1 \circ L_2 \in \mathrm{NREG}$

ראינו בהרצאה כי קשה ביותר עם DFA "טהור" להוכיח את הטענה. לעומת זאת, טריוויאלי ב־REG להוכיח כי $L_1 \cdot \{\#\} \cdot L_2$ היא רגולרית. לעומת זאת, טריוויאלי לעשות את זה (לאו דווקא הכי פורמלי) עם שימוש במעברי ε.

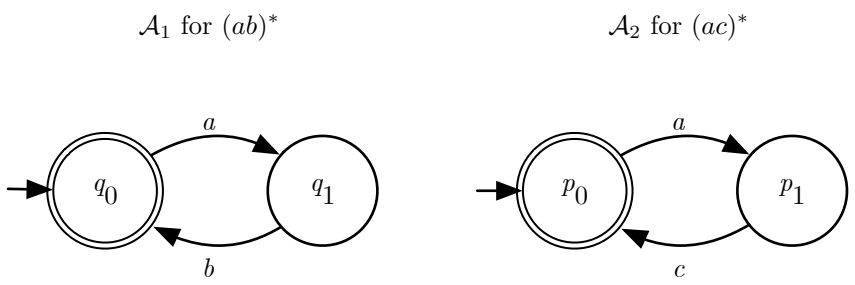
סקיצת ההוכחה. **1.** נמתח מעברי ε מהמצבים המקבלים של $\mathcal{A}_1$, האוטומט שמזהה את L_1 למצבים ההתחלתיים של $\mathcal{A}_2$, האוטומט שמזהה את L_2.

2. נהפוך את המצבים המקבלים של A_1 ללא מקבלים

3. נהפוך את המצבים ההתחלתיים של A_2 ללא התחלתיים.
וסיימנו. □

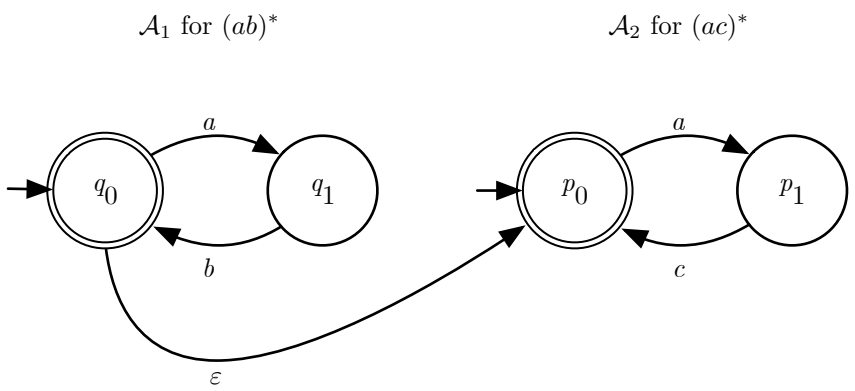
דוגמה **2.3.1.** להלן דוגמה לשרשור של שני NFAים עם מעברי ε:

1. בסיס:



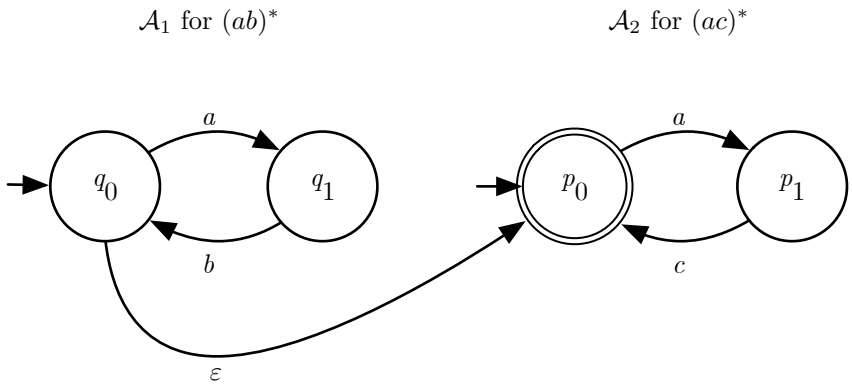
איור 5

2. שלב 1 - ניצור מעברי ε:



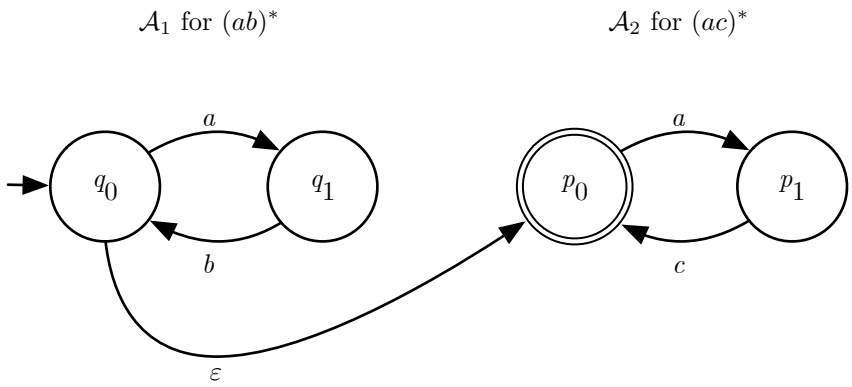
איור 6

3. שלב 2 - נוריד את מצבי $\mathcal{A}_1$ מהמצבים המקבלים:



איור 7

4. שלב 3 - נוריד את מצבי $\mathcal{A}_2$ מהמצבים ההתחלתיים:



איור 8

2.4 פרמול מעברי ε

הגדרה 2.4.1 (מעבר ε). 1. אם q מגיע ל־q' עם σ ו־q' מגיע ל־q'' במעבר ε נעשה מעבר מ־q ל־q'' עם σ

2. אם מצב התחלתי q עובר במעבר ε למצב q' נהפוך גם את q' להתחלתי

נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$\forall q \in Q : E(q) = \{p \in Q \mid p \text{ is reachable from } q \text{ using only } \varepsilon \text{ transitions}\}$$

הגדרה 2.4.2. יהי $\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \eta', P_0, F)$ NFA עם מעברי ε. נסמן ב־η את פונקציית המעברים **החוקית** של N.
נגדיר $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q, F)$ NFA שקול ל־$\mathcal{N}$ בלי מעברי ε באופן הבא:

$$\delta(q, \sigma) \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{q' \in \eta(q,\sigma)} E(q')$$

ונעשה ש־$Q_0 = \bigcup_{q \in P_0} E(q)$

2.5 פונקציית המעברים המוכללת δ^*

הגדרה 2.5.1. פונקציית המצבים המוכללת $\delta^* : (2^Q \times \Sigma^*) \to 2^Q$ תהיה מוגדרת באופן הבא:

$$\delta^*(S, w) = \left\{ q \in Q \middle| \text{There exists a run } (r_i)_{i=0}^n \text{ such that } \begin{smallmatrix} r_0 \in S \\ r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1}) \\ r_n = q \end{smallmatrix} \right\}$$

באופו שקול,

$$\delta^*(S, w) = \begin{cases} S & w = \varepsilon \\ \bigcup_{q \in \delta^*(S,u)} \delta(q, \sigma) & w = u \cdot \sigma \end{cases}$$

טענה 2.5.1. *שתי ההגדרות שקולות.*

הגדרה 2.5.2. יהי $\mathcal{A}$ NFA. השפה אשר הוא מזהה היא

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(Q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}$$